Задания дистанционного отборочного этапа

1. (7-8) Некоторое число А делят с остатком на все натуральные числа меньшие А. Сумма всех различных(!) остатков оказалась равной А. Найдите А.
2. (8-10) Даны многочлены $P(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^2 - x + 506$ и $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Найдите $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$, где $z_1, z_2, z_3, z_4 -$ различные корни многочлена Q.
3. (8-10) Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника делит его на две части. Какое наибольшее значение может принимать отношение площадей этих частей?
4. (8-10) Длины двух медиан треугольника не больше 1. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник?
5. (7-8) Найдите наибольшее натуральное число, каждая некрайняя цифра которого меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.
6. (7-8) Саша разрезал головку сыра на 10 кусков и съел самый маленький кусок. Потом он разрезал один из кусков на два и съел самый маленький кусок из десяти. Потом он снова разрезал один из кусков на два и съел самый маленький кусок из десяти. Какую наибольшую долю головки мог съесть Саша?
7. (7-8) Какое наибольшее количество натуральных чисел может обладать свойством: их сумма и произведение равны 1998?
8. (7-8) У каждого составного числа от 1 до 100 нашли простой делитель. Найдите сумму обратных величин всех этих делителей.
9. (7-8) На бесконечной шахматной доске стоит конь. Он, сделав 4 хода, вернулся в исходную клетку, не побывав ни на одной клетке дважды. Сколькими способами он мог это сделать?
10. (9-10) Какое наибольшее значение может принимать следующее выражение: $\sin x\, cos\, y + \sin y\, cos\, 2x$.
11. (7-8) Утверждение «Ровно для четырех целых n число $(2n + y)/(n - 2) -$ целое» верно лишь для некоторых y. При скольких y из промежутка $1 \leq y \leq 20$ оно верно?
12. (7-8) В классе учится 20 человек, при этом нет трех девочек, которые имели бы поровну друзей среди одноклассников-мальчиков. Какое наименьшее число мальчиков может учиться в этом классе?
13. (8-10) У вписанного четырехугольника ABCD AB=1, BC=1, CD=2, DA=3. Найдите его площадь.
14. (8-10) Найдите все линейные функции $f(x)$, для которых $f\big(f(1)\big) = f\Big(f\big(f(1)\big)\Big)$.
15. (7-8) В ящике лежат 100 носков четырех различных цветов. Известно, что если, не заглядывая в ящик вытащить 90 носков, то среди них обязательно найдутся 4 носка различных цветов. Какое наименьшее число носков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 носка различных цветов?
16. (8-10) Сколько существует квадратных трехчленов с целыми коэффициентами, принимающих значение в точках 0, 1 и 2 значения, по модулю не превосходящие 5?
17. (7-9) В графе 9 вершин, при этом из первой выходит одно ребро, из второй – два, из третьей – три, …, из девятой – 9. Сколько есть маршрутов, проходящих через каждую вершину ровно по одному разу? (Прямой и обратный маршруты считаются за один.)
18. (7-10) Решите в целых числах $3x^2 - 2xy - y - x - 1 = 0$.
19. (7-9) Решите уравнение $\big|\ldots\big||x| + 5\big| + 5\big|\ldots + 5\big| = x + 50$ (модуль используется 10 раз)
20. (7-9) В графе 6 вершин и 7 ребер. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов степеней вершин этого графа? В графе нет петель и кратных ребер.
21. (8-10) Найти все числа n для которых число $\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$ – целое.